Výrokový počet, který touto definicí sémantiky dostaneme, budeme označovat jako MVP-K nebo prostě K. (Všimněme si, že sémantika MVP-S5, kterým jsme se zabývali v předchozím oddíle, by byla z tohoto hlediska nahlédnutelná jako speciální případ naší současné sémantiky, při které je každý svět vždy dosažitelný z každého jiného.) Axiomatika tohoto MVP je tvořena axiomy a odvozovacím pravidlem KVP plus následujícím axiomem a pravidlem:

(K) $\Box(A\to B)\to(\Box A\to\Box B)$,

(*nec*) A / $\Box A$.

4.7 Úplnost

Snadno se přesvědčíme o tom, že je-li A odvoditelný z $A_1,\ldots, A_n$, pak z nich globálně vyplývá – K je tedy silně korektní (vzhledem ke globálnímu vyplývání). Dokázat silnou úplnost tak triviální není; lze to však provést prostřednictvím konstrukce charakteristického modelu – tak jak jsme to udělali v důkaze věty o rozšíření v oddíle 4.3 pro alternativní sémantiku KVP.

Než to provedeme, definujme ještě slabší formu odvoditelnosti; půjde v podstatě o odvoditelnost bez použití pravidla necesitace. Řekneme, že A je *klasicky odvoditelný* z $A_1, \ldots, A_n$, je-li výrok $(A_1\to(\ldots(A_n\to A)\ldots))$ teorémem K. (A je tedy klasicky odvoditelný z prázdné množiny právě tehdy, když je teorémem K, to jest A je klasickým teorémem právě tehdy, když je teorémem. A je klasicky odvoditelný z nekonečné množiny, je-li klasicky odvoditelný z nějaké její podmnožiny.) Rozdíl mezi odvoditelností a klasickou odvoditelností lze ilustrovat pomocí faktu, že zatímco výrok $\Box A$ je *odvoditelný* z výroku A (pomocí pravidla (*nec*)), *klasicky odvoditelný* z něj není.

Tato definice přímo zaručuje, že pro klasické odvozování platí věta o dedukci. V důsledku toho můžeme pro *klasickou* odvoditelnost v rámci K dokázat obdobu věty, kterou jsme výše (na str. 101) formulovali pro KVP. Dokážeme však mírně modifikované tvrzení. Nazvěme množinu výroků jazyka MVP *klasicky konzistentní teorií*, patří-li do ní každý výrok, který je z ní klasicky odvoditelný, a není-li z ní klasicky odvoditelný žádný výrok spolu se svou negací. Pak

Platí: Jestliže A není v K odvoditelný z X, pak existuje maximální klasicky konzistentní teorie (*mkk-teorie*), která obsahuje vše, co je odvoditelné (nikoli jenom klasicky, to jest i s použitím necesitace) z X, ale neobsahuje A.

Důkaz: Buď X^* množina všech výroků, které jsou odvoditelné z X. Není-li A odvoditelný z X, pak jistě není odvoditelný ani z X^*, a X^* je tedy konzistentní, a tím spíše klasicky konzistentní. Pomocí konstrukce popsané ve větě o rozšíření (uvedené na straně 102) ji tedy lze rozšířit na klasicky konzistentní teorii, která neobsahuje A. Navíc protože pro klasické odvozování platí věta o dedukci a protože [11] je teorémem K, lze způsobem analogickým důkazu věty na str. 103 ukázat, že je to *maximální* klasicky konzistentní teorie.

Všimněme si, že fakt, že pro K platí odboba věty na str. 101, znamená, že pro K platí i obdoby všech jejích důsledků na str. 102 a 103. Takže mj.

Platí: A je v K klasicky odvoditelný z X právě tehdy, když je obsažen v každé mkk-teorii, která obsahuje X.

Nyní jsme připraveni dokázat silnou úplnost K – avšak namísto toho, abychom dokázali přímo, že cokoli globálně vyplývá, je odvoditelné, dokážeme tvrzení, které je tomuto zřejmě ekvivalentní, totiž že cokoli není odvoditelné, globálně nevyplývá.

Platí: Není-li výrok A odvoditelný z množiny výroků X, pak z ní globálně nevyplývá, to jest existuje interpretace jazyka K, při které jsou všechny prvky X pravdivé ve všech možných světech, ale A v některém ne.

Důkaz: Buď W množina všech maximálních klasicky konzistentních rozšíření množiny X^* všech výroků, které jsou odvoditelné z X. Definujme na W binární relaci R následujícím předpisem:

$$w \mathrm{R} w' \equiv_{\mathrm{Def.}} \{C \mid \Box C \in w\} \subseteq w'$$

Nechť výrok platí ve w právě tehdy, když je jeho prvkem. Pak zřejmě všechny výroky, které patří do X^*, platí ve všech prvcích W a A alespoň v jednom neplatí (v důsledku toho, co jsme ukázali výše). Abychom dokázali, že jsme zkonstruovali požadovaný model, stačí nyní dokázat, že pro každé B a pro každé $w \in W$

$\Box B \in w$ právě tehdy, když pro každé w' takové, že w R w', platí $B \in w'$

Přímá implikace je zřejmá; takže stačí dokázat nepřímou. Nechť tedy

pro každý w' takový, že w R w', platí $B \in w'$

To znamená, že

pro každý w' takový, že $\{C \mid \Box C \in w\} \subseteq w'$, platí $B \in w'$

Jinými slovy

každá mkk-teorie, která obsahuje X^* a $\{C \mid \Box C \in w\}$, obsahuje i B.

To ale, jak jsme ukázali výše, je totéž jako

B je klasicky odvoditelný z X^* a $\{C \mid \Box C \in w\}$

a tedy totéž jako

existují $D_1,...,D_m$ z X^* a $C_1,...,C_n$ z $\{C \mid \Box C \in w\}$ tak, že z $D_1,...,D_m$, $C_1,...,C_n$ je klasicky odvoditelný B.

Podle definice klasické odvoditelnosti toto znamená, že

$(D_1 \rightarrow (...(D_m \rightarrow (C_1 \rightarrow (...(C_n \rightarrow B)...)))...))$ je teorémem K;

a z toho s použitím pravidla (*nec*) plyne, že

$\Box(D_1 \rightarrow (...(D_m \rightarrow (C_1 \rightarrow (...(C_n \rightarrow B)...)))...))$ je teorémem K,

a z toho zase opakovaným použitím axiomu (K) plyne, že

$(\Box D_1 \rightarrow (...(\Box D_m \rightarrow (\Box C_1 \rightarrow (...(\Box C_n \rightarrow \Box B)...)))...))$ je teorémem K.

To ale podle definice klasické odvoditelnosti znamená, že

$\Box B$ je klasicky odvoditelný z $\Box D_1, \ldots, \Box D_m, \Box C_1,...,\Box C_n$

Přitom $\Box D_1,...,\Box D_m$ patří do X^* (protože X^* je uzavřená na necesitaci), a tudíž do w' a $\Box C_1,...,\Box C_m$ patří do w'. To znamená, že do w' patří i $\Box B$.

K je tedy silně korektní a úplný, to jest A je odvoditelný z X právě tehdy, když z ní globálně vyplývá.

Vedlejším prodkuktem tohoto důkazu je důkaz existence charakteristického modelu, to jest takové interpretace, při které je výrok pravdivý právě tehdy, když je teorémem. Z právě dokázané věty totiž plyne, že není-li výrok A teorémem, pak existuje interpretace jazyka K, při které je tento výrok nepravdivý – stačí vzít za X prázdnou množinu. Přitom interpretace, kterou v rámci tohoto důkazu konstruujeme, je tatáž pro jakýkoli výrok A – tato interpretace tedy přiřazuje N všem výrokům, které nejsou teorémy, a je tedy charakteristickým modelem. Charakteristickým modelem je tudíž interpretace, jejíž univerzum je tvořeno všemi mkk-teoriemi a svět w' je na něm dosažitelný ze světa w právě tehdy, když $\{C \mid \Box C \in w\} \subseteq w'$.

Dalším, přímým důsledkem silné úplnosti je kompaktnost K:

Platí tedy i: K je kompaktní, to jest výrok A vyplývá z množiny výroků X právě tehdy, když vyplývá z nějaké její konečné podmnožiny.

Důkaz: Dokázali jsme, že A vyplývá z X právě tehdy, když je z ní odvoditelný; a odvoditelný z nekonečné množiny je zřejmě právě tehdy, když je odvoditelný z nějaké její konečné podmnožiny.

Je zřejmé, že neomezíme-li se na klasickou odvoditelnost, pak v K věta o dedukci neplatí: podle pravidla (*nec*) je $\Box A$ je odvoditelný z A pro každé A, ale $A \rightarrow \Box A$ obecně teorémem není[1].

Analogicky, jako jsme dokázali, že se globální vyplývání kryje s odvoditelností, lze nyní dokázat to, že se lokální vyplývání kryje s klasickou odvoditelností. Prověření toho, že je-li A klasicky odvoditelný z $A_1, \ldots, A_n$, pak z nich lokálně vyplývá, je opět rutinní záležitostí, takže znovu dokážeme jenom obrácenou implikaci.

Platí: Není-li výrok A klasicky odvoditelný z množiny výroků X, pak z ní lokálně nevyplývá.

Důkaz: Musíme ukázat, že pro každou množinu X a každý výrok A takový, že A není klasicky odvoditelný z X, existuje interpretace a svět v jejím univerzu tak, že jsou v tomto světě pravdivé všechny prvky X, avšak nikoli A. Takovou interpretaci vytvoříme tak, že za její univerzum vezmeme všechny mkk-teorie (to jest množiny

[1] Podobně jako například v případě FVP-Ł ovšem pro MVP-K platí něco, co se větě o dedukci v jistém smyslu blíží: totiž výrok B je odvoditelný z množiny $X \cup \{A\}$ právě tehdy, když existuje m takové, že z X je odvoditelný výrok $(A \wedge \Box A \wedge \Box\Box A \wedge \ldots \wedge \Box^m A) \rightarrow B$ (kde $\Box^m$ značí řetězec m operátorů $\Box$). V rámci MVP-T můžeme výrok $(A \wedge \Box A \wedge \Box\Box A \wedge \ldots \wedge \Box^m A) \rightarrow B$ zjednodušit na $\Box^m A \rightarrow B$ (protože $\Box^m A$ implikuje $\Box^{m-1} A$, a tudíž $\Box^j A$ pro každé $j \leq m$); a v rámci MVP-S4 pak dále na $\Box A \rightarrow B$ (protože $\Box A$ implikuje $\Box^j A$ pro jakékoli $j \geq 1$).

výroků, které obsahují všechny výroky, které jsou z nich *klasicky* odvoditelné, ze kterých není *klasicky* odvoditelný žádný výrok spolu se svou negací a které obsahují negaci každého výroku, který neobsahují) a relaci dosažitelnosti na tomto univerzu definujeme tak jako v předchozím případě předpisem

$$w \mathrm{R} w' \equiv_{\mathrm{Def.}} \{C \mid \Box C \in w\} \subseteq w'.$$

Opět musíme dokázat, že je tato definice definicí skutečné interpretace, to jest že $\Box B \in w$ právě tehdy, když $B \in w'$ pro každý w' takový, že w R w'.

Je zřejmé, že

$B \in w'$ pro každý w' takový, že w R w'

platí právě tehdy, když

B je klasicky odvoditelný z výroků $B_1, \ldots, B_n$, které jsou všechny prvky $\{C \mid \Box C \in w\}$.

Způsobem, který byl podrobně předveden v přechozím důkazu, lze ukázat, že pak

$\Box B$ je klasicky odvoditelný z $\Box B_1, \ldots, \Box B_n$, kde $\{B_1, \ldots, B_n\} \subseteq \{C \mid \Box C \in w\}$,

a tedy že

$\Box B$ je klasicky odvoditelný z w.

A protože w je teorie (vzhledem ke klasické odvoditelnosti),

$\Box B \in w$.

Opět jsme tedy definovali skutečnou interpretaci. Přitom v jejím univerzu zřejmě existuje svět, ve kterém jsou pravdivé všechny prvky X, avšak nikoli A: již dobře známým způsobem totiž umíme zkonstruovat maximální klasicky axiomaticky konzistentní teorii, která obsahuje X, avšak jejím prvkem není A.

4.8 Rozhodnutelnost